Томъ II. Листъ 8 и 9.

ВѢСТНИКЪ МАТЕМАТИЧЕСКИХЪ НАУКЪ.

№ 32 и 33.

I.

Элементарное изложеніе теоріи опредѣлителей.

(продолженіе, см. № 30).

5-ое свойство. *Ежели въ опредѣлитель элементы какой нибудь вертикальной линіи представляютъ суммы двухъ количествъ, то опредѣлитель этотъ равенъ суммѣ двухъ опредѣлителей, отличающихся отъ даннаго тѣмъ, что въ нихъ на мѣстахъ суммъ, стоятъ одни слагаемыя, и обратно.* Напр.

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2}+\alpha & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2}+\beta & \ldots & a_{n,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1} & a_{n,2}+\nu & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{1,1} & \alpha & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \beta & \ldots & a_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1} & \nu & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

Для доказательства этого свойства расположимъ опредѣлитель по той вертикальной линіи, въ которой находятся суммы количествъ, тогда получимъ:

$$D = (a_{1,2}+\alpha)\,A_1^2 + (a_{2,2}+\beta)\,A_2^2 + \ldots + (a_{n,2}+\nu)\,A_n^2 =$$
$$(a_{1,2}\,A_1^2 + a_{2,2}\,A_2^2 + \ldots\ldots\ldots + a_{n,2}\,A_n^2) + (\alpha\,A_1^2 + \beta\,A_2^2 \ldots\ldots + \nu\,A_n^2)$$

6-ое свойство. *Желая умножить опредѣлитель на какое либо число, достаточно помножить на это число всѣ элементы какой либо вертикальной линіи, и обратно.*

Это свойство есть слѣдствіе предъидущаго, впрочемъ оно очевидно изъ слѣдующаго равенства:

ежели $D = a_{1,\cdot}\,A_1' + a_{2,\cdot}\,A_2' + \ldots + a_{n,\cdot}\,A_n'$,

то $mD = ma_{1,\cdot}\,A_1' + ma_{2,\cdot}\,A_2' + \ldots + ma_{n,\cdot}\,A_n'$.

Слѣдствіе 1-ое. *Общій множитель элементовъ одной вертикальной линіи можно выносить за знакъ опредѣлителя.* Ибо

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \ldots & ma_{1,\cdot} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \ldots & ma_{2,\cdot} & \ldots & a_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1} & \ldots & ma_{n,\cdot} & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix} = m \begin{vmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,\cdot} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \ldots & a_{2,\cdot} & \ldots & a_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1} & \ldots & a_{n,\cdot} & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

Ежели $m = 0$, то и опредѣлитель равенъ нулю.

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \ldots & 0 & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \ldots & 0 & \ldots & a_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1} & \ldots & 0 & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix} = 0.$$

Слѣдствіе 2-ое. Опредѣлитель не измѣняется, если къ каждому изъ элементовъ одной вертикальной линіи прибавимъ соотвѣтствующій элементъ какой либо другой параллельной линіи, помноженный на постоянный множитель.

§ 4. Изслѣдованіе функціи $A^{\prime}$.—Для полученія функціи A_r^s можемъ поступить слѣд. образомъ. Въ опредѣлителѣ переставимъ вертикальныя линіи r и s получимъ:

$$\Sigma \pm a_{1,1}\, a_{2,2} \dots a_{r,r} \dots a_{s,s} \dots a_{n,n} = -\Sigma \pm a_{1,1}\, a_{2,2} \dots a_{r,s} \dots a_{s,r} \dots a_{n,n}\,;$$

въ послѣднемъ опредѣлителѣ, взявъ $a_{r,s}$ за скобки, выйдетъ:

$$A_r^s = -\Sigma \pm a_{1,1}\, a_{2,2} \dots a_{r-1,r-1}\, a_{r+1,r+1} \dots a_{s-1,s-1}\, a_{s,r}\, a_{s+1,s+1} \dots a_{n,n}. \qquad (1)$$

Отсюда видно, что функція A_r^s есть тоже опредѣлитель $(n-1)$-ого порядка, система котораго получается изъ системы даннаго, если выкинемъ изъ послѣдней горизонтальную линію r и вертикальную s.

Для легчайшаго составленія этого новаго опредѣлителя удобнѣе брать за главное произведеніе то, въ которомъ указатели идутъ по порядку натуральныхъ чиселъ, т. е.

$$a_{1,1}\, a_{2,2} \dots a_{r-1,r-1}\, a_{r+1,r}\, a_{r+2,r+1} \dots a_{s-1,s-2}\, a_{s,s-1}\, a_{s+1,s+1} \dots a_{n,n}\,; \qquad (2)$$

тогда $A_r^s = \varepsilon\Sigma \pm (a_{1,1}\, a_{2,2} \dots a_{r-1,r-1}\, a_{r+1,r}\, a_{r+2,r+1} \dots a_{s-1,s-2}\, a_{s,s-1}\, a_{s+1,s+1} \dots a_{n,n})$,

гдѣ ε есть -1 или $+1$, смотря потому, получается ли послѣдовательность вторыхъ указателей въ членѣ (2) изъ послѣдовательности сихъ же указателей въ членѣ (1), посредствомъ четнаго или нечетнаго числа перестановленій по два указателя. Послѣдній вопросъ легко рѣшить по правилу Коши:

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c}1 & 2 & \dots & r-1 & r\;, r+1 \dots s-2,\; s-1 & s+1 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & r-1 & r+1, r+2 \dots s-1,\; s & s+1 & \dots & n\end{array}\right)$$

круговыхъ замѣненій будетъ числомъ: $r-1+1+n-s = n+r-s$; вычтя изъ $n-1$, получимъ $n-1-n-r+s = s-r-1$, а посему $\varepsilon = (-1)^{s-r}$ и, смотря потому будетъ ли $s-r$ четное, или нечетное, ε будетъ $+1$ или -1. Убѣдившись въ томъ, что функціи A_r^s суть опредѣлители $n-1$-ого порядка и умѣя опредѣлять ихъ, мы теперь можемъ воспользоваться формулою:

$$D = a_{1,s}\, A_1^s + a_{2,s}\, A_2^s + \dots + a_{r,s}\, A_r^s + \dots + a_{n,s}\, A_n^s$$

для вычисленія опредѣлителя, что, при n значительномъ, было-бы довольно неудобно произвести, слѣдуя правилу, данному въ началѣ. Подобнымъ образомъ опредѣлитель $n-1$-ого порядка можетъ быть приведенъ къ алгебраической суммѣ опредѣлителей $n-2$-ого порядка и т. д., покамѣсть не дойдемъ до опредѣлителей 2-ого порядка, которые легко получить непосредственно. *Напр.*

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & a_{1,5} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} & a_{2,5} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} & a_{3,5} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} & a_{4,5} \\ a_{5,1} & a_{5,2} & a_{5,3} & a_{5,4} & a_{5,5} \end{vmatrix} = a_{1,1} \begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} & a_{2,5} \\ a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} & a_{3,5} \\ a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} & a_{4,5} \\ a_{5,2} & a_{5,3} & a_{5,4} & a_{5,5} \end{vmatrix} - a_{2,1} \begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & a_{1,5} \\ a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} & a_{3,5} \\ a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} & a_{4,5} \\ a_{5,2} & a_{5,3} & a_{5,4} & a_{5,5} \end{vmatrix}$$

$$+ a_{3,1} \begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & a_{1,5} \\ a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} & a_{2,5} \\ a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} & a_{4,5} \\ a_{5,2} & a_{5,3} & a_{5,4} & a_{5,5} \end{vmatrix} - a_{4,1} \begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & a_{1,5} \\ a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} & a_{2,4} \\ a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} & a_{3,5} \\ a_{5,2} & a_{5,3} & a_{5,4} & a_{5,5} \end{vmatrix} + a_{5,2} \begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & a_{1,5} \\ a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} & a_{2,5} \\ a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} & a_{3,5} \\ a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} & a_{4,5} \end{vmatrix}$$

$$= a_{1,1} \left\{ a_{2,2} \begin{vmatrix} a_{3,3} & a_{3,4} & a_{3,5} \\ a_{4,3} & a_{4,4} & a_{4,5} \\ a_{5,3} & a_{5,4} & a_{5,5} \end{vmatrix} - a_{3,2} \begin{vmatrix} a_{2,3} & a_{2,4} & a_{2,5} \\ a_{4,3} & a_{4,4} & a_{4,5} \\ a_{5,3} & a_{5,4} & a_{5,5} \end{vmatrix} + a_{4,2} \begin{vmatrix} a_{2,3} & a_{2,4} & a_{2,5} \\ a_{3,3} & a_{3,4} & a_{3,5} \\ a_{5,3} & a_{5,4} & a_{5,5} \end{vmatrix} \right.$$

$$\left. - a_{5,2} \begin{vmatrix} a_{2,3} & a_{2,4} & a_{2,5} \\ a_{3,3} & a_{3,4} & a_{3,5} \\ a_{4,3} & a_{4,4} & a_{4,5} \end{vmatrix} \right\} - a_{2,1} \left\{ \dots \right\} + \dots$$

$$= a_{1,1} \left\{ a_{2,2} \left[a_{3,3} \begin{vmatrix} a_{4,4} & a_{4,5} \\ a_{5,4} & a_{5,5} \end{vmatrix} - a_{4,3} \begin{vmatrix} a_{3,4} & a_{3,5} \\ a_{5,4} & a_{5,5} \end{vmatrix} + a_{5,3} \begin{vmatrix} a_{3,4} & a_{3,5} \\ a_{4,4} & a_{4,5} \end{vmatrix} \right] - a_{3,2} \left[\dots \right] + \dots \right\}$$

$$- a_{2,1} \left\{ \dots \right\} + \dots$$

Примѣчаніе 1. Если въ равенствѣ:

$$D = a_{1,s}\ A_1^s + a_{2,s}\ A_2^s + \ldots + a_{r,s}\ A_r^s + \ldots + a_{n,s}\ A_n^s$$

$a_{1,s} = a_{2,s} = \ldots = a_{n,s} = 0$, за исключеніемъ одного только элемента $a_{r,s}$ то выйдетъ

$$D = a_{r,s}\ A_r^s$$

и обратно, произведеніе опредѣлителя A_r^s на множитель $a_{r,s}$ можно представить подъ видомъ новаго опредѣлителя D, въ которомъ всѣ элементы вертикальной линіи s равны нулю, за исключеніемъ элемента $a_{r,s}$.

Прим. 2-ое. Функція A_r^s, называемая 1-мъ частнымъ опредѣлителемъ, есть ни что иное какъ частная производная главнаго опредѣлителя относительно перемѣнной $a_{r,s}$.

Въ самомъ дѣлѣ

$$D = a_{1,s}\ A_1^s + a_{2,s}\ A_2^s + \ldots + a_{r,s}\ A_r^s + \ldots + a_{n,s}\ A_n^s .$$

$\frac{dD}{da_{r,s}} = A_r^s$; слѣдовательно:

$$D = a_{1,s}\frac{dD}{da_{1,s}} + a_{2,s}\frac{dD}{da_{2,s}} + \ldots + a_{r,s}\frac{dD}{da_{r,s}} + \ldots + a_{n,s}\frac{dD}{da_{n,s}} .$$

$$a_{1,p}\frac{dD}{da_{1,s}} + a_{2,p}\frac{dD}{da_{2,s}} + \ldots + a_{r,p}\frac{dD}{da_{r,s}} + \ldots + a_{n,p}\frac{dD}{da_{n,s}} = 0$$

Такъ какъ $\frac{dD}{da_{r,s}}$ не заключаетъ въ себѣ ни элементовъ ряда r ни элементовъ колонны s, а посему:

$$\frac{d^2D}{da^2_{r,s}} = 0 .$$

(продолженіе впредь).

О НАХОЖДЕНІИ ЗАВИСИМОСТИ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФУНКЦІИ ОТЪ СУММЪ КОНЕЧНЫХЪ И СУММЪ ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНЫХЪ (1).

Чтобы упростить рѣшеніе предложенной задачи, найдемъ сначала значеніе интеграла:

$$\int_q^p \frac{\sin kx}{2\sin\frac{\Delta ux}{2}}dx .$$

Для сего возмемъ равенство:

$$(a)\qquad \sum_0^{k+\frac{\Delta u}{2}}{}_u \cos ux = \frac{\sin kx}{2\sin\frac{\Delta ux}{2}} + \frac{1}{2}\quad (*)$$

Для существованія его, очевидно, необходимо чтобы:

$$k + \frac{\Delta u}{2} \equiv 0 \quad (\text{мод. } \Delta u),$$

или:

$$k \equiv \frac{\Delta u}{2}(\text{мод. } \Delta u);$$

въ слѣдствіе чего:

$$k = n\Delta u + \frac{\Delta u}{2} .$$

Разсматривая дробь $\frac{\sin kx}{2\sin\frac{\Delta ux}{2}}$ видимъ, что при

$$x = \frac{2\pi}{\Delta u},$$

она обращается въ:

$$\frac{\sin\left(n\Delta u + \frac{\Delta u}{2}\right)\frac{2\pi}{\Delta u}}{2\sin\pi} = \frac{\sin(2n\pi + \pi)}{2\sin\pi} = \frac{0}{0}$$

Поэтому истинное значеніе ея, при этомъ значеніи перемѣнной, будетъ:

$$(b)\qquad \left\{\frac{\sin\left(n\Delta u + \frac{\Delta u}{2}\right)x}{2\sin\frac{\Delta ux}{2}}\right\}_{x=\frac{2\pi}{\Delta u}} = \frac{k}{\Delta u} .$$

Зная это проинтегрируемъ равенство (a), между предѣлами, отъ $-p$ до $+q$;

(*) Буква u, поставленная въ срединѣ знака Σ, показываетъ, что сигма берется относительно u по приращенію Δu. Если-же u будетъ равно, напр 2, то это значитъ что сигма берется относительно u по приращенію 2.

(1) Статья эта есть кандидатская диссертація автора и помѣщается здѣсь безъ всякихъ сокращеній, или измѣненій; она представляетъ притомъ нѣкоторыя исправленія въ выводахъ конечныхъ суммъ, напечатанныхъ уже въ N. 22 этого изданія. *Прим. Ред.*

$$(c)\quad \sum_{0}^{k+\frac{\Delta u}{2}} \frac{\sin uq + \sin up}{u} = \int_{-p}^{+q} \frac{\sin kx}{2\sin\frac{\Delta ux}{2}}dx + \frac{1}{2}(q+p)\ (*)$$

Измѣняя перемѣнную $kx = y$, получимъ:

$$\int_{-p}^{+q} \frac{\sin kx}{2\sin\frac{\Delta ux}{2}}dx = \int_{-kp}^{+kq} \frac{\sin y}{2\sin\frac{y\Delta u}{2k}}\frac{dy}{\frac{1}{k}}\,.$$

Откуда, принявъ $k = \infty$, находимъ:

$$\int_{-p}^{+p} \frac{\sin kx}{2\sin\frac{\Delta ux}{2}}dx = \frac{\pi}{\Delta u}\,.$$

Съ другой-же стороны, если $k = \infty$, то, на основаніи равенства (b), перемѣнная x не должна ни разу принимать значенія $\frac{2\pi}{\Delta u}$, между предѣлами интегрированія: ибо иначе интегрированіе равенства (a) — невозможно.

Принявъ во вниманіе сказанное, подставимъ значеніе послѣдняго интеграла въ (c); тогда найдемъ:

$$\sum_{0}^{\infty} \frac{\sin uq + \sin up}{u} = \frac{\pi}{\Delta u} + \tfrac{1}{2}(q+p)\,.$$

Полагая здѣсь, $p = q$:

$$(d)\quad \sum_{0}^{\infty} \frac{\sin up}{u} = \frac{\pi}{2\Delta u} + \frac{p}{2}\,.$$

Посмотримъ, удовлетворяетъ-ли эта сигма выше изложеннымъ условіямъ?

Для этого сдѣлаемъ въ ней $p = 6\pi$, $\Delta u = 1$:

$$\sum_{0}^{\infty} \frac{\sin u6\pi}{u} = \frac{\pi}{2} + 3\pi,$$ — нелѣпость, какой и должно было ожидать, ибо $u\Delta u$, въ этомъ случаѣ равняется 6π.

Но если, при положеніи $p = 6\pi$, сдѣлаемъ $\Delta u = \frac{1}{6}$:

$$\sum_{0}^{\infty} \frac{\sin u6\pi}{u} = 6\pi,$$ — что вѣрно.

Кромѣ того, изъ (c), имѣемъ:

$$\int_{-p}^{+q} \frac{\sin kx}{2\sin\frac{x\Delta u}{2}}dx = \sum_{0}^{\infty} \frac{\sin uq + \sin up}{u} - \frac{1}{2}(q+p)$$

Откуда, на основаніи равенства (d), заключаемъ: если $p > 0$ и $q > 0$, то:

$$(e)\quad \int_{-p}^{+q} \frac{\sin kx}{2\sin\frac{\Delta ux}{2}}dx = \frac{\pi}{\Delta u}\,;$$

если $p = 0$, $q > 0$:

$$(f)\quad \int_{0}^{+q} \frac{\sin kx}{2\sin\frac{\Delta ux}{2}}dx = \frac{\pi}{2\Delta u}\,;$$

наконецъ, если $q > 0$ и $p = -p$, гдѣ $p > 0$, то:

$$(g)\quad \int_{+p}^{+q} \frac{\sin kx}{2\sin\frac{\Delta ux}{2}}dx = 0\,.$$

Теперь, съ цѣлью рѣшить предложенный вопросъ, найдемъ значеніе слѣдующей двойной суммы:

$$(A)\quad Y = \int_{-p}^{+q} \sum_{-\frac{n}{\varepsilon}+\frac{\Delta u}{2}}^{+\frac{n}{\varepsilon}+\frac{\Delta u}{2}} {}^{u} F(x, \psi y)\cos uy\, dy\,.$$

Для этого имѣемъ:

$$Y = \int_{-p}^{+q} F(x, \psi y)\frac{\sin\left(\frac{ny}{\varepsilon}\right)}{\sin\frac{y\Delta u}{2}}dy\,,$$

гдѣ, если функція $\frac{F(x, \psi y)}{\sin\frac{y\Delta u}{2}}$ сплошная, между разсматриваемыми предѣлами; то, измѣнивъ перемѣнную $\frac{\varepsilon}{y}$ въ z, найдемъ:

$$Y = \int_{\frac{p}{\varepsilon}}^{+\frac{q}{\varepsilon}} F(x, \psi\varepsilon z)\frac{\sin nz}{\sin\frac{\varepsilon z\Delta u}{2}}\frac{dz}{\frac{1}{\varepsilon}}$$

или:

(*) Изъ этого равенства, при $p = 0$, $q = \frac{m\pi}{\Delta u}$, $k = n\Delta u + \frac{\Delta u}{2}$, найдемъ:

$$\int_{0}^{\frac{m\pi}{\Delta u}} \frac{\sin[(n+\frac{1}{2})x\Delta u]}{\sin\frac{\Delta ux}{2}}dx = \sum_{0}^{(n+1)\Delta u} \frac{\sin u\frac{m\pi}{\Delta u}}{u} = \frac{m\pi}{\Delta u},$$

при условіи, чтобы m и n были цѣлыя числа.

$$Y = \lim F(x\,,\,\psi\varepsilon z)\,.\,\lim \int_{-\frac{p}{\varepsilon}}^{+\frac{q}{\varepsilon}} \frac{\sin nz}{\dfrac{\sin\frac{\varepsilon z\Delta u}{2}}{\frac{1}{\varepsilon}}}\,dz\,,$$

что, на основании равенствъ (e), (f) и (g), доставить:

$$(h)\qquad \frac{2\pi}{\Delta u}\,F(x\,,\,\psi 0) = \int_{-p}^{+q} \sum_{-\infty}^{+\infty} F(x\,,\,\psi y)\cos uy\,dy\,,$$

$$(i)\qquad \frac{\pi}{\Delta u}\,F(x\,,\,\psi 0) = \int_{0}^{+q} \sum_{-\infty}^{+\infty} F(x\,,\,\psi y)\cos uy\,dy\,,$$

$$(k)\qquad 0 = \int_{+p}^{+q} \sum_{-\infty}^{+\infty} F(x\,,\,\psi y)\cos uy\,dy\,.$$

Въ слѣдствіе послѣдняго равенства, можемъ написать слѣдующее свойство двойной суммы:

$$(l)\qquad \int_{0}^{+q} \sum_{-\infty}^{+\infty} F(x,\psi y)\cos uy\,dy = \int_{0}^{+w} \sum_{-\infty}^{+\infty} F(x,\psi y)\cos uy\,dy,$$

гдѣ w — величина по произволенію малая.

Посмотримъ, нѣтъ-ли еще какихъ-либо условій, кромѣ выше указанныхъ, которымъ должно подчиняться равенство (k), для того, чтобы свойство (l) всегда имѣло мѣсто? Для сего имѣемъ:

$$\int_{+p}^{+q} \sum_{-\infty}^{+\infty} F(x\,,\,\psi y)\cos uy\,dy = \int_{+p}^{+q} \frac{F(x\,,\,\psi y)}{\sin\frac{y\Delta u}{2}}\sin ky\,dy = \int_{+p}^{+q} \varphi(x\,,\,\psi y)\sin ky\,dy =$$

$$= -\left\{\frac{\varphi(x\,.\,\psi y)\cos ky}{k}\right\}_{+p}^{+q} + \frac{1}{k}\int_{+p}^{+q} \varphi'(x\,,\,\psi y)\cos ky\,dy\,.\ (*)$$

Откуда заключаемъ: если функція φ и ея производная φ' — конечны и сплошныя для всѣхъ значеній перемѣнной, отъ величины w, по произволенію малой, до нѣкоторой конечной величины q, то, въ такомъ случаѣ, сумма (k) постоянно равна нулю, — а слѣдовательно свойство (l) всегда имѣетъ мѣсто.

Сдѣлаемъ приложеніе формулы (i) къ нахожденію нѣкоторыхъ конечныхъ суммъ.

Для этого положимъ въ ней, сначала,

$F(x\,,\,\psi y) = e^{ay}$, а потомъ: $F(x\,,\,\psi y) = e^{-ay}$;

тогда найдемъ:

$$\frac{\pi}{\Delta u} = \int_{0}^{q} \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{ay}\cos uy\,dy\,,\quad \frac{\pi}{\Delta u} = \int_{0}^{q} \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{-ay}\cos uy\,dy\,;$$

откуда:

$$\int_{0}^{q} e^{ay}\cos uy\,dy = \left\{\frac{e^{ay}\,[u\sin uy + a\cos uy]}{a^2+u^2}\right\}_{0}^{q}$$

$$\int_{0}^{q} e^{-ay}\cos uy\,dy = \left\{\frac{e^{-ay}\,[u\sin uy - a\cos uy]}{a^2+u^2}\right\}_{0}^{q}$$

Поэтому:

$$\frac{\pi}{\Delta u} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{aq}\,[u\sin uq + a\cos uq] - a}{a^2+u^2}\,,$$

$$\frac{\pi}{\Delta u} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-aq}\,[u\sin uq - a\cos uq] + a}{a^2+u^2}\,.$$

Такъ какъ въ полученныхъ уравненіяхъ входятъ три неизвѣстныя суммы; то, поэтому, рѣшеніе ихъ, въ отношеніи каждаго изъ искомыхъ, повидимому не возможно. Но эта невозможность легко устранится, выбравъ для q приличное значеніе.

Такимъ значеніемъ для q, какъ не трудно видѣть, должно быть $\frac{\pi}{\Delta u}$. Кромѣ того, значеніе это — единственное: ибо, хотя $q = \frac{2\pi}{\Delta u}$ и сводитъ разсматриваемыя уравненія на уравненія съ двумя неизвѣстными, но согласно съ выше изложенной теоріей, оно не можетъ быть нами принято.

И такъ, полагая въ этомъ уравненіи $q = \frac{\pi}{\Delta u}$, найдемъ:

$$\frac{\pi}{\Delta u}\,e^{-\frac{\pi a}{\Delta u}} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{u\sin u\frac{\pi}{\Delta u} + a\cos u\frac{\pi}{\Delta u} - a\,e^{-\pi\frac{a}{\Delta u}}}{a^2+u^2}$$

$$\frac{\pi}{\Delta u}\,e^{\frac{\pi a}{\Delta u}} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{u\sin u\frac{\pi}{\Delta u} - a\cos u\frac{\pi}{\Delta u} + a\,e^{\pi\frac{a}{\Delta u}}}{a^2+u^2}\,.$$

Складывая эти равенства, получимъ:

(*) Гдѣ: $\varphi(x\,,\,\psi y) = \dfrac{F(x\,.\,\psi y)}{\sin\frac{y\Delta u}{2}}$, $k = \infty$.

$$\frac{\pi}{\Delta u}\left[e^{\pi\frac{a}{\Delta u}}+e^{-\pi\frac{a}{\Delta u}}\right]=2\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{u\sin u\frac{\pi}{\Delta u}+a\left[e^{\pi\frac{a}{\Delta u}}-e^{-\pi\frac{a}{\Delta u}}\right]}{a^2+u^2};$$

откуда:

$$\sum_{0}^{\infty}\frac{a}{u^2+a^2}=\frac{\pi}{\Delta u}\left\{\frac{e^{\pi\frac{a}{\Delta u}}+e^{-\pi\frac{a}{\Delta u}}}{e^{\pi\frac{a}{\Delta u}}-e^{-\pi\frac{a}{\Delta u}}}\right\}$$

или:

$$\sum_{0}^{\infty}\frac{a}{u^2+a^2}=-\frac{\pi}{i\Delta u}\cdot\operatorname{cotg}\frac{\pi a}{\Delta u}i.$$

Сравнивая значеніе этой суммы, при $\Delta u=1$, съ значеніемъ ея, даннымъ нами въ 22 № Вѣстника Математическихъ Наукъ, видимъ что они разнятся между собою; — что и должно быть, ибо, въ послѣднемъ случаѣ, мы не принимали во вниманіе разрывности функціи между предѣлами интегрированія.

Подставивъ значеніе этой суммы въ первоначальныя уравненія, найдемъ:

$$\frac{\pi}{\Delta u}\left(1-\frac{1}{i}\operatorname{cotg}\frac{\pi a}{\Delta u}i\right)e^{-qa}=\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{u\sin uq+a\cos uq}{a^2+u^2}$$

$$\frac{\pi}{\Delta u}\left(1+\frac{1}{i}\operatorname{cotg}\frac{\pi a}{\Delta u}i\right)e^{qa}=\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{u\sin uq-a\cos uq}{a^2+u^2}.$$

Откуда:

$$2\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{u\sin uq}{a^2+u^2}=\frac{\pi}{\Delta u}\left[e^{qa}+e^{-qa}+\frac{1}{i}\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi ai}{\Delta u}\right)\left\{e^{qa}+e^{-qa}\right\}\right]=\frac{\pi}{\Delta u}\left[2\cos qai-\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi ai}{\Delta u}\right).2\sin aqi\right]$$

$$2\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{u\cos uq}{a^2+u^2}=\frac{\pi}{\Delta u}\left[e^{-qa}-e^{qa}+i\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi ai}{\Delta u}\right)\left\{e^{-qa}+e^{qa}\right\}\right]=\frac{\pi}{\Delta u}\left[2i\sin qai+2i\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi ai}{\Delta u}\right).\cos aqi\right].$$

или:

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{u\sin uq}{a^2+u^2}=\frac{\pi}{\Delta u\sin\frac{\pi ai}{\Delta u}}.\left\{\sin\left(\frac{a\pi i}{\Delta u}\right).\cos qai-\sin qai.\cos\frac{a\pi i}{\Delta u}\right\}=\frac{\pi}{\Delta u}.\frac{\sin a\left(\frac{\pi}{\Delta u}-q\right)i}{\sin a\frac{\pi i}{\Delta u}}$$

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{u\cos uq}{a^2+u^2}=\frac{\pi i}{\Delta u\sin\frac{\pi ai}{\Delta u}}.\left\{\sin aqi.\sin\frac{a\pi i}{\Delta u}+\cos\frac{a\pi i}{\Delta u}\cos aqi\right\}=\frac{\pi i}{\Delta u}.\frac{\cos a\left(\frac{\pi}{\Delta u}-q\right)i}{\sin\frac{a\pi i}{\Delta u}}$$

или:

$$\sum_{0}^{\infty}\frac{u\sin uq}{u^2+a^2}=\frac{\pi}{\Delta u}.\frac{e^{a\left(\frac{\pi}{\Delta u}-q\right)}-e^{-a\left(\frac{\pi}{\Delta u}-q\right)}}{e^{\frac{a\pi}{\Delta u}}-e^{-\frac{a\pi}{\Delta u}}},$$

$$\sum_{0}^{\infty}\frac{u\cos uq}{u^2+a^2}=\frac{\pi}{\Delta u}.\frac{e^{a\left(\frac{\pi}{\Delta u}-q\right)}+e^{-a\left(\frac{\pi}{\Delta u}-q\right)}}{e^{\frac{a\pi}{\Delta u}}-e^{-\frac{a\pi}{\Delta u}}}.$$

Сдѣлавъ въ (i) $F(x;\psi y)=\cos ay$, а потомъ $\sin ay$, найдемъ:

$$\frac{\pi}{\Delta u}=\int_{0}^{q}\sum_{-\infty}^{+\infty}\cos ay.\cos uy\,dy$$

$$0=\int_{0}^{q}\sum_{-\infty}^{+\infty}\sin ay.\cos uy\,dy;$$

откуда:

$$\int_{0}^{q}\cos ay.\cos uy\,dy=\left[\frac{u\sin uy.\cos ay-a\cos uy.\sin ay}{u^2-a^2}\right]_{0}^{q}$$

$$\int_{0}^{q}\sin ay.\cos uy\,dy=\left[\frac{u\sin uy.\sin ay+a\cos uy.\cos ay}{u^2-a^2}\right]_{0}^{q}$$

Слѣдовательно:

$$\frac{\pi}{\varDelta u}=\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{u\sin uq\,.\,\cos aq-a\cos uq\,.\,\sin aq}{u^2-a^2}$$

$$0=\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{u\sin uq\,.\,\sin aq+a\cos uq\,.\,\cos aq-a}{u^2+a^2}$$

Рѣшая эти уравненія въ отношеніи одного изъ интеграловъ, найдемъ:

$$\frac{\pi}{\varDelta u}\cos aq=\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{u\sin uq-a\sin aq}{u^2-a^2}\,.$$

Полагая здѣсь, $q=\frac{\pi}{\varDelta u}$, получимъ:

$$\frac{\pi}{\varDelta u}\cos a\frac{\pi}{\varDelta u}=\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{u\sin u\frac{\pi}{\varDelta u}-a\sin a\frac{\pi}{\varDelta u}}{u^2-a^2}\;;$$

поэтому:

$$-\frac{\pi}{\varDelta u}\operatorname{cotg}a\frac{\pi}{\varDelta u}=\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{a}{u^2-a^2}\,.$$

Подставивъ значеніе послѣдней суммы въ первоначальныя уравненія, найдемъ:

$$\frac{\pi}{\varDelta u}=\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{u\sin uq\,.\,\cos aq-a\cos uq\,.\,\sin aq}{u^2-a^2}$$

$$-\frac{\pi}{\varDelta u}\operatorname{cotg}\frac{a\pi}{\varDelta u}=\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{u\sin uq\,.\,\sin aq+a\cos uq\,.\,\cos aq}{u^2-a^2}\,;$$

откуда:

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{u\sin uq}{u^2-a^2}=\frac{\pi}{\varDelta u}\left[\cos aq-\operatorname{cotg}a\frac{\pi}{\varDelta u}\,.\,\sin aq\right]$$

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{a\cos uq}{u^2-a^2}=-\frac{\pi}{\varDelta u}\left[\sin aq+\operatorname{cotg}a\frac{\pi}{\varDelta u}\,.\,\cos aq\right]$$

или:

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{u\sin uq}{u^2-a^2}=\frac{\pi}{\varDelta u}\,.\,\frac{\sin a\left(\frac{\pi}{\varDelta u}-q\right)}{\sin\frac{a\pi}{\varDelta u}}$$

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{a\cos uq}{u^2-a^2}=-\frac{\pi}{\varDelta u}\,.\,\frac{\cos a\left(\frac{\pi}{\varDelta u}-q\right)}{\sin\frac{a\pi}{\varDelta u}}\,.$$

Возмемъ теперь формулу (h), и сдѣлаемъ въ ней $F(x\,,\psi y)=F(x+y)$:

$$\frac{2\pi}{\varDelta u}F(x)=\int_{-p}^{+q}\sum_{-\infty}^{+\infty}F(x+y)\cos uy\,dy\,.$$

Измѣнивъ здѣсь перемѣнную $x+y=z$, найдемъ:

$$\frac{2\pi}{\varDelta u}F(x)=\int_{-p+x}^{+q+x}F(z)\cos u(z-x)\,dz\,,$$

гдѣ, по причинѣ неравенствъ

$$q>0>-p\,,\qquad\text{имѣемъ:}\qquad q+x>x>-p+x\,.$$

Съ другой же стороны, такъ какъ, q и p произвольны, то, вмѣсто послѣднихъ неравенствъ, можемъ написать:

$m)$ $$m>x>n\;;$$

въ слѣдствіе чего послѣдняя формула приметъ видъ:

$n)$ $$\frac{2\pi}{\varDelta u}F(x)=\int_n^m\sum_{-\infty}^{+\infty}F(z)\cos u(z-x)\,dz\;;$$

гдѣ x — величина, совершенно произвольная, удовлетворяющая неравенствамъ (m); въ которыхъ величины m и n, въ свою очередь, должны подчиняться выше изложеннымъ условіямъ.

Изъ послѣдней формулы находимъ:

$$F(x)=\frac{\varDelta u}{2\pi}\int_n^m\sum_{-\infty}^{+\infty}F(z)\cos u(z-x)\,dz$$

$$h\,F'(x)=\frac{\varDelta u}{2\pi}\int_n^m\sum_{-\infty}^{+\infty}F(z).uh.\cos[u(z-x)-\frac{\pi}{2}]\,dz$$

$$\frac{h^2}{2!}F''(x)=\frac{\varDelta u}{2\pi}\int_n^m\sum_{-\infty}^{+\infty}F(z).\frac{(uh)^2}{2!}.\cos[u(z-x)-2\frac{\pi}{2}]\,dz$$

. . . .

$$\frac{h^n}{n!}F^{(n)}(x)=\frac{\varDelta u}{2\pi}\int_n^m\sum_{-\infty}^{+\infty}F(z)\frac{(uh)^n}{n!}.\cos[u(z-x)-n\frac{\pi}{2}]\,dz$$

. . . . (*)

Поэтому:

$$F(x)+h\,F'(x)+\frac{h^2}{2!}F''(x)+\ldots+\frac{h^n}{n!}F^{(n)}(x)+\ldots=\frac{\varDelta u}{2\pi}\int_n^m\sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{u}F(z)\sum_0^{\infty}{}^{n}\frac{a^n\cos(v-n\frac{\pi}{2})}{\Gamma(n+1)}\,dz\;;$$

гдѣ: $a=uh\,,\quad v=u\,(z-x)$.

(*) Гдѣ $n!$ означаетъ произведеніе натуральныхъ чиселъ отъ 1 до n.

Но:

$$\sum_0^\infty{}_n \frac{a^n \cos(v - n\frac{\pi}{2})}{\Gamma(n+1)} = \sum_0^\infty \frac{a^n \cos v \,.\, \cos n\frac{\pi}{2} + a^n \sin v \,.\, \sin v \frac{\pi}{2}}{\Gamma(n+1)} =$$

$$= \cos v\,(1 - \frac{a^2}{2!} + \frac{a^4}{4!} - \ldots) + \sin v\,(a - \frac{a^3}{3!} + \frac{a^5}{5!} - \ldots) = \cos v . \cos a + \sin v . \sin a = \cos(v - a) = \cos u(z - x - h).$$

Поэтому:

$$F(x) + h\,F'(x) + \frac{h^2}{2!}F''(x) + \ldots + \frac{h^n}{n!}F^{n)}(x) + \ldots = \frac{\Delta u}{2\pi}\int_n^m \sum_{-\infty}^{+\infty} F(z)\cos u\,(z - x - h)\,dz\,.$$

Слѣдовательно:

$$F(x+h) = F(x) + h\,F'(x) + \frac{h^2}{2!}F''(x) + \ldots + \frac{h^n}{n!}F^{n)}(x) + \ldots$$

Такъ изъ формулы (n) выводится теорема Тейлора.

При нахожденіи значенія двойной суммы (A), мы должны были отказаться отъ случая при которомъ, $y = \frac{2\pi}{\Delta u}$. Посмотримъ теперь, не приведетъ-ли насъ этотъ случай къ какому нибудь результату?

Для этого сдѣлаемъ въ (A) $p = 0$ и $F(x, \psi y) = f(x + \psi y)$; въ слѣдствіе чего придется намъ найти значеніе суммы:

$$Y = \int_0^q \sum_0^n{}_u f(x, \psi y)\cos uy\,dy\ ;\quad (*)$$

гдѣ, какъ мы видѣли, по причинѣ конечнаго значенія n, функція f остается конечною для значеній $y = \frac{2\pi}{\Delta u}$.

Чтобы найти условія, при которыхъ возможно найти значеніе разсматриваемой суммы, разложимъ функцію f въ рядъ по теоремѣ Тейлора:

$$o)\quad Y = f(x)\int_0^q \sum_0^n \cos uy\,dy + f'(x)\int_0^q \sum_0^n \psi(y)\cos uy\,dy + \ldots + \frac{f^{(k)}(x)}{k!}\int_0^q \sum_0^n \psi^k(y)\cos uy\,dy + \ldots\ldots$$

Разсматривая это выраженіе, замѣчаемъ: пока общій членъ разложенія, $\int_0^q \sum_0^n \psi^k(y)\cos uy\,dy$, не нуль, до тѣхъ поръ искомое значеніе двойной суммы — строка.

Но дабы этотъ членъ равнялся нулю, необходимо и достаточно чтобы:

$$\int_0^q \psi^k(y)\cos uy\,dy = 0\,,\quad \int_0^q \psi^k(y)\,dy = 0\,.$$

Послѣдняго-же достигнемъ, принявъ: $\psi(y) = \varrho\, e^{yi}$ (*)

Въ самомъ дѣлѣ, подставивъ значеніе $\psi(y)$ въ раванство (o), найдемъ:

$$p)\quad Y = f(x)\int_0^q [1 + \cos\Delta uy + \ldots + \cos l\Delta uy + \ldots]\,dy + \ldots + \frac{f^{(k)}(x)}{k!}\varrho^k\int_0^q e^{kyi}[1 + \cos\Delta uy + \ldots + \cos l\Delta uy + \ldots]\,dy + \ldots$$

(*) Гдѣ: $n \equiv 0$ (*mod.* Δu).

(*) Гдѣ ϱ величина, по восходящимъ степенямъ которой функція f разлагается въ сходящуюся строку.

Откуда, на основанiи предъидущихъ сужденiй, должны существовать слѣдующiя равенства:

$$\int_0^q e^{kyi}\cos l\Delta uy\,dy = 0\ ,\quad \int_0^q e^{lyi}\,dy = 0\ ,$$

или:

$$q)\qquad \left\{e^{kyi}\frac{[l\Delta u\sin l\Delta uy + ki\cos l\Delta uy]}{(l\Delta u)^2 - k^2}\right\}_0^q = 0\ ,$$

$$r)\qquad \left\{\frac{e^{kyi}}{xi}\right\}_0^q = 0\ ;$$

что влечетъ за собою условiя:

$$\frac{\sin l\Delta uq}{(l\Delta u)^2 - k^2} = 0\ ,\quad e^{kqi} = +1\ ,$$

для существованiя которыхъ необходимо и достаточно чтобы:

$$s)\qquad (l\Delta u)^2 - k^2 >< 0$$

$$t)\qquad \sin l\Delta uq = 0$$

$$u)\qquad \cos kq = +1\ .$$

Неравенству (s) удовлетворимъ, принявъ:

$$\Delta u < \frac{1}{n}\ .$$

Въ самомъ дѣлѣ, если $\Delta u < \frac{1}{n}$, то и $l\Delta u < \frac{l}{n}$, гдѣ, какъ l есть одно изъ значенiй n, всегда меньшихъ его, то $l\Delta u$ всегда правильная дробь. А такъ какъ k всегда число цѣлое, то, поэтому $(l\Delta u)^2 - k^2$ никогда нулемъ быть не можетъ.

Чтобы удовлетворить равенству (t) необходимо принять:

$$l\Delta uq = 2s\pi\ ,\qquad \text{откуда:}\qquad q = \frac{2s\pi}{l\Delta u}\ .$$

Гдѣ, если $\frac{s}{l}$ равно числу цѣлому, напр. m, то:

$$q = \frac{2m\pi}{\Delta u}$$

будетъ необходимое и достаточное условiе для существованiя равенства (t).

Для существованiя-же равенства (u) необходимо и достаточно, чтобы въ послѣднемъ выраженiи q, величина $\frac{m}{\Delta u}$ была цѣлымъ числомъ.

И такъ, необходимыя и достатоточныя условiя для существованiя равенствъ (q) и (r) суть:

$$\Delta u < \frac{1}{n}\ ,\quad q = \frac{2m\pi}{\Delta u}\ ,$$

гдѣ $\frac{m}{\Delta u}$ равно цѣлому числу.

Принявъ въ соображенiе сказанное, изъ равенства (p), найдемъ:

$$v)\qquad \frac{2m\pi}{\Delta u}f(x) = \int_0^{\frac{2m\pi}{\Delta u}} \sum_0^n f(x + \varrho\, e^{yi})\cos uy\,dy\ .$$

Такова зависимость существующая, между произвольною функцiею суммами дифференцiальными и суммами конечными.

Совершивъ, въ послѣдней формулѣ, суммированiе по u, найдемъ:

$$\sum_0^n \cos uy = \frac{\sin y\left(n - \frac{\Delta u}{2}\right)}{2\sin\frac{y\Delta u}{2}} + \frac{1}{2}\ .$$

Поэтому:

$$x)\qquad \frac{4m\pi}{\Delta u}f(x) = \int_0^{\frac{2m\pi}{\Delta u}} f(x + \varrho\, e^{yi})\left[\frac{\sin y\left(n - \frac{\Delta u}{2}\right)}{\sin\frac{y\Delta u}{2}} + 1\right]dy\ .$$

Но сдѣлавъ въ (v) $n = \Delta u$:

$$\frac{2m\pi}{\Delta u}f(x) = \int_0^{\frac{2m\pi}{\Delta u}} f(x + \varrho\, e^{yi})\,dy\ .$$

Послѣднiй-же интегралъ носитъ названiе формулы Коши; — слѣдовательно формула Коши есть частный случай зависимости произвольной функцiи отъ суммъ конечныхъ и суммъ дифференцiальныхъ.

Подставивъ значеніе этаго интеграла въ равенство (x), найдемъ формулу:

$$\frac{2m\pi}{\Delta u} f(x) = \int_0^{\frac{2m\pi}{\Delta u}} f(x + \varrho\, e^{yi}) \frac{\sin y\left(n - \frac{\Delta u}{2}\right)}{\sin \frac{y \Delta u}{2}} dy ,$$

заключающую въ себѣ множество частныхъ видовъ.

С. Петербургъ 1862. Авг. 22. *Н. Коцієвскій.*

III.

Возможность употребленія гальваническаго регистратора какъ угломѣрнаго снаряда.

Мысль замѣнить кругъ высотъ гальваническимъ аппаратомъ, котораго конструкція описана въ 4-мъ № этого изданія, была въ недавнее время сообщена мною Директору Обсерваторіи въ Альтонѣ, Г-ну Петерсу и заслужила его одобреніе (*). Для читателей Вѣстника Математическихъ Наукъ, знакомыхъ съ упоминаемымъ приборомъ, будетъ легко понятно новое примѣненіе, которое я предлагаю сдѣлать изъ него.

Если гальваническій регистраторъ помѣстить на одномъ и томъ же штативѣ съ переноснымъ пассажнымъ инструментомъ и послѣдній снабдить, на одномъ концѣ горизонтальной оси, металлическимъ дискомъ съ довольно широкимъ ребромъ, отточеннымъ концентрически съ цапфами инструмента; то возможно было бы соединить этотъ дискъ съ часовымъ механизмомъ регистратора слѣдующимъ образомъ.—Движеніе шестерни, обращающей рольку съ безконечною бумагою, посредствомъ нѣсколькихъ прибавочныхъ колесъ, можетъ передаваться рычагу, центръ движенія котораго долженъ лежать на продолженіи оси вращенія пассажнаго инструмента. Для этого ось вращенія рычага должна имѣть толстоту цапфовъ и находиться на продолженіи оси пассажнаго инструмента, что можетъ достигаться испытаніемъ при помощи уровня того же инструмента. Если представимъ теперь себѣ, что описанный рычагъ на внѣшнемъ концѣ своемъ, загнутомъ надъ краемъ диска пассажн. инструм., носитъ небольшую рольку, которой ось горизонтальна, парраллельна оси пассаж. инстр. и притомъ постоянно придавливается къ окружности диска, особою пружиною; то понятно, что каждое движеніе рычага, или трубы пассажнаго инструмента должно производить обращеніе рольки на ея оси. Стоитъ представить теперь только, что упоминаемая ролька, приготовленная изъ матеріала непроводящаго токъ, имѣетъ съ одной стороны разрѣзъ по длинѣ, въ который вставлена тонкая платиновая пластинка, доходящая до ея оси, и что эта ось соединена съ однимъ полюсомъ сигнальной батареи, а дискъ съ другимъ; то при каждомъ обращеніи рольки, какъ скоро платиновая пластинка придетъ въ прикосновеніе съ окружностью диска, долженъ послѣдовать сигналъ. При помощи этого устройства можно во всякое время и съ желаемою точностью съ одной стороны опредѣлить длину окружности рольки во времени, (если часовой механизмъ будетъ въ движеніи, а труба неподвижна); а съ другой стороны—отношеніе окружности рольки къ окр. диска, если рычагъ будетъ неподвиженъ, а будемъ обращать трубу пассажнаго инструмента нѣсколько разъ вокругъ, начиная отъ какого-либо опредѣленнаго положенія (напр. на надиръ, или на коллиматоръ) и возвращаясь къ тому же самому положенію.

Если теперь желаемъ опредѣлить высоту звѣзды, то, направивши на нее трубу инструмента и закрѣпивъ въ требуемомъ положеніи, приводимъ часовой механизмъ въ движеніе посредствомъ перваго сигнала, и нѣсколько секундъ спустя, поправивъ еще, если нужно, положеніе трубы микрометрическимъ винтомъ, дадимъ 2-й сигналъ, который будетъ означать моментъ наблюдаемой высоты. Затѣмъ, подождавъ, чтобы, въ слѣдствіе обращенія рольки часовымъ механизмомъ, послѣдовалъ 2-й сигналъ, освободимъ трубу и будемъ медленно обращать ее въ такомъ направленіи, чтобы передаваемое этимъ движеніемъ вращеніе рולькѣ происходило въ туже сторону, какъ и въ слѣдствіе вращенія рычага. Приблизившись такимъ образомъ къ постоянной точкѣ, снова закрѣпляемъ трубу и окончательную установку производимъ микрометрическомъ винтомъ, подвигая трубу всегда въ одномъ и томъ же направленіи. Наконецъ, ожидаемъ еще одного сигнала въ слѣдствіе вращенія рольки уже при неизмѣнномъ положеніи трубы, и тогда можемъ остановить часовой механизмъ. Наблюденіе такимъ образомъ окончено; ибо на безконечной полоскѣ бумаги мы найдемъ отмѣченнымъ число полныхъ оборотовъ рольки, начиная отъ 2-го сигнала до послѣдняго, и соотвѣтственное этому промежутку число секундъ съ долями, въ теченіи которыхъ ролька вращалась въ слѣдствіе движенія часоваго механизма. Зная какое число полныхъ оборотовъ и частей онаго приходится на это время, мы можемъ вычесть это число изъ полнаго числа оборотовъ, отмѣченныхъ на бумагѣ, и получимъ въ остаткѣ величину угла, описаннаго трубою, (между 2-мя направленіями:

(*) Извлеченіе изъ письма моего помѣщено въ № 1377 Astr. Nachr.

на звѣзду и постоянную точку), выраженную въ оборотахъ, или длинѣ окружности рольки.

Дабы быть въ состоянiи приблизительно судить, какой степени точности можно ожидать отъ такого способа опредѣленiя высотъ безъ помощи раздѣленнаго круга, я принимаю, что полное обращенiе рычага часовымъ механизмомъ происходитъ въ 1 часъ, т. е. что въ 1 сек. онъ проходитъ по окружности диска 6′, и что интервалъ между двумя секундными знаками на безконечной полоскѣ бумаги равняется одному дюйму; тогда одной линiи соотвѣтствуетъ еще дуга въ 30″, а если положить, что можно вѣрно отчитываетъ при помощи масштаба $\frac{1}{5}$ долю линiи; то возможная точность въ отчетѣ будетъ доходить до 6″.—Наивыгоднѣйшее отношенiе окружности рольки къ окружности диска всего лучше можетъ быть опредѣлено изъ опыта. Если окружность диска составляетъ 60 дюйм, а окружность рольки 1 дюймъ, то послѣдняя будетъ совершать полный оборотъ въ 1 минуту.

Я считаю умѣстнымъ присовокупить здѣсь, въ дополненiе къ описанiю прибора, еще нѣкоторыя замѣчанiя.—Магнитный приборъ для замыканiя секунднаго тока, изображенный на фигурѣ IV, былъ введенъ въ употребленiе весною прошедшаго года въ замѣнъ ртутнаго прибора и оказался въ полной мѣрѣ соотвѣтствующимъ цѣли; такъ что до настоящаго времени не было замѣчено мною ни малѣйшаго недостатка въ дѣйствiи онаго, и по этому поводу не было надобности открывать ящика часовъ.—Къ указаннымъ мною въ описанiи удобствамъ въ употребленiи Виленскаго аппарата, въ сравненiи съ другими хронографами, въ послѣднее время присоединилось еще одно, а именно слѣдующее. Къ рычагу (фигура III) системы якорей, поддерживающему штифтъ, служащiй для задерживанiя часоваго механизма, я присоединилъ другой штифтъ, который при движенiи системы якорей, происходящемъ отъ перваго сигнала (т. е. при дѣйствiи магнита *двигателя*), опускается въ поставленную подъ нимъ чашечку съ ртутью и тѣмъ самымъ замыкаетъ секундный проводникъ. Такимъ образомъ теперь не нужно, передъ началомъ каждаго наблюденiя, подвигать коммутаторъ *K′* и приводить часы въ сообщенiе съ аппаратомъ: это дѣйствiе производитъ первый сигналъ, даваемый отъ инструмента, который въ то же время пускаетъ и часовой механизмъ въ движенiе. Удобство, достигнутое такимъ образомъ, становится весьма чувствительнымъ, какъ скоро мѣсто наблюденiя значительно удалено отъ помѣщенiя самаго аппарата. Случай къ описанному улучшенiю представился мнѣ именно при проведенiи проволокъ къ рефрактору, который помѣщается здѣсь въ значительной высотѣ надъ меридiанною залою. Наконецъ, при случаѣ перенесенiя баттарей въ теплое помѣщенiе подъ залою обсерваторiи, съ цѣлiю предохранить оныя на будущее время отъ замерзанiя въ теченiи зимы, я нашелъ, что для совершенно регулярнаго дѣйствiя оныхъ достаточно трехъ проводниковъ; а именно, что электроды: положительный одной баттареи и отрицательный другой могутъ быть соединены въ одинъ.

Г.

Извлеченiя изъ перiодическихъ изданiй.

1 Объ интегрированiи дифференцiальныхъ уравненiй движенiя, **П. Соколова** (Comp. Rend. T. LV. № 2). Статья 2-ая (см. № 31 Вѣстника).

Тоже выраженiе, которое употреблено Авторомъ для вывода уравненiй движенiя; а именно

$$(\varphi - T)\,dt + \Sigma\, m_i\,(u_i\,dx_i + v_i\,dy_i + w_i\,dz_i)\;\ldots\;(1)$$

служитъ весьма простымъ образомъ и къ выводу теоремъ относительно интеграловъ этихъ уравненiй.

Авторъ принимаетъ для простоты, что разсматриваемая система совершенно свободна и число составляющихъ ее матерiальныхъ точекъ n; почему число перемѣнныхъ $u_i\ v_i\ w_i\ ,\ x_i\ldots$ будетъ $6n$, и таково же число дифференцiальныхъ уравненiй перваго порядка, для опредѣленiя перемѣнныхъ въ функцiи времени t.

Предположимъ, что найдено $3n$ интеграловъ этихъ уравненiй и что, при посредствѣ оныхъ, количества $u_i\,v_i\,w_i$ выражены въ функцiи перемѣнныхъ t_i, x_i, y_i, z_i и произвольныхъ постоянныхъ: $a_1, a_2, \ldots a_{3n}$; то, подставивъ эти выраженiя въ (1) и дифференцируя его въ отношенiи $a_1, a_2 \ldots a_n$, каждый изъ этихъ дифференцiаловъ, при помощи уравненiй движенiя, которыя еще подлежатъ интегрированiю, а именно

$$dx_i = u_i\,dt\,,\ dy_i = v_i\,dt\,,\ dz_i = w_i\,dt\,,$$

приводится къ нулю. Въ самомъ дѣлѣ: часть выраженiя (1), зависящая отъ измѣненiй количествъ u_i, v_i, w_i при посредствѣ уравненiй движенiя уничтожается. А какъ съ другой стороны можно предположить, что измѣненiя количествъ u_i, v_i, w_i происходятъ отъ измѣненiя произвольныхъ постоянныхъ $a_1, a_2 \ldots a_{3n}$, то слѣдуетъ, что дифференцiалы выраженiя (1) въ отношенiи къ этимъ постояннымъ, при посредствѣ уравненiй движенiя, должны обращаться въ нуль. Это легко повѣрить и самымъ вычисленiемъ.

И такъ, означивъ для сокращенiя письма посредствомъ Δ выраженiе (1), мы будемъ имѣть

$$\frac{d\Delta}{da_1} = 0\,,\ \frac{d\Delta}{da_2} = 0\,,\ \ldots\ \frac{d\Delta}{da_{3n}} = 0\,.$$

Эти уравненiя линейныя и перваго порядка въ отношенiи перемѣнныхъ: t, x_i, y_i, z и какъ ихъ числомъ $3n$ и онѣ должны удовлетворяться тѣми же величинами перемѣнныхъ x_i, y_i, z_i какъ и уравненiя:

$$dx_i = u_i\,dt\,,\ dy_i = v_i\,dt\,,\ dz_i = w_i\,dt\;;$$

то очевидно, что ихъ можно подставить въ послѣднiя. Сдѣлавъ эту подставку, можно видѣть будетъ ли выраженiе Δ точнымъ дифференцiаломъ функцiи отъ перемѣнныхъ t, x_i, y_i, z_i т. е. $\Delta = dQ$; и въ такомъ случаѣ будемъ имѣть:

$$d\left(\frac{dQ}{da_1}\right)=0\ ,\ d\left(\frac{dQ}{da_2}\right)=0\ ,\ .\ .\ .\ .\ ,\ d\left(\frac{dQ}{da_{3n}}\right)=0\ ;$$

откуда

$$\frac{dQ}{da_1}=\beta_1\ ,\ \frac{dQ}{da_2}=\beta_2\ ,\ .\ .\ .\ .\ ,\ \frac{dQ}{da_{3n}}=\beta_{3n}\ ,$$

гдѣ β_1, β_2, β_{3n} суть новыя произвольныя постоянныя.

И такъ задача сводится на изысканіе: составляетъ ли выраженіе Δ точный дифференціалъ. Вообще, по замѣчанію автора, можно доказать, что только въ одномъ случаѣ выраженіе Δ всегда можетъ быть интегрируемо, а именно когда оно, кромѣ перемѣнной t, содержитъ еще одну только перемѣнную, напр. x_1; въ этомъ случаѣ выраженіе Δ приводится къ виду $Pdt+Qdx_1$, гдѣ P и Q суть функціи только t и x_1.

Изъ предъидущей статьи извѣстно, что взявъ варіаціонъ выраженія Δ и приравнивая нулю часть этаго варіаціона, которая не составляетъ полнаго дифференціала, получаются уравненія движенія. Если теперь, говоритъ авторъ, посредствомъ нѣсколькихъ интегрированій, изъ этихъ уравненій исключится число перемѣнныхъ, равное числу найденныхъ интеграловъ; то получатся дифференціальныя уравненія, которыя остается интегрировать, дабы достигнуть рѣшенія задачи. Если же изъ этихъ послѣднихъ уравненій, при помощи первоначальныхъ уравненій движенія, исключимъ всѣ дифференціалы перемѣнныхъ, то окончательныя уравненія должны быть тождественными; ибо въ противномъ случаѣ онѣ дали бы условныя уравненія, которыя не должны имѣть мѣста, И такъ, полагая, что при помощи найденныхъ интеграловъ уравненій движенія, выраженіе Δ приведено къ формѣ $Pdt+Qdx_1$, то, взявъ варіаціонъ его и заставляя измѣняться только одну перемѣнную x_1, мы получимъ часть этаго варіаціона, несоставляющую точнаго дифференціала и которая, по предъидущему, должна быть тождественна съ нулемъ:

$$\left(\frac{dP}{dx_1}-\frac{dQ}{dt}\right)dt\ \delta x_1\ .$$

Но дабы это выраженіе было тождественно съ нулемъ, необходимо, чтобы $\frac{dP}{dx_1}-\frac{dQ}{dt}$ равнялось нулю, а слѣдовательно $Pdt+Qdx_1$ было точнымъ дифференціаломъ.

Изъ этой теоремы непосредственно слѣдуетъ извѣстная теорема Якоби, выражающая, что если интегрированы всѣ уравненія движенія, за исключеніемъ одного съ двумя перемѣнными; то это послѣднее всегда можетъ интегрироваться посредствомъ квадратуры.

Когда предложенная задача допускаетъ начало живыхъ силъ, то $T=\varphi+h$, гдѣ h постоянно, и выраженіе (1) обращается въ

$$-h\,dt+\Sigma\,m_i\,(u_i\,dx_i+v_i\,dy_i+w_i\,dz_i)\ ;$$

а уравненія (2) принимаютъ видъ:

$$\Sigma\,m_i\left(\frac{du_i}{dh}\,dx_i+\frac{dv_i}{dh}\,dy_i+\frac{dw_i}{dh}\,dz_i\right)=dt$$

$$\Sigma\,m_i\left(\frac{du_i}{da_1}\,dx_i+\frac{dv_i}{da_1}\,dy_i+\frac{dw_i}{da_1}\,dz_i\right)=0$$

$$.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .$$

$$\Sigma\,m_i\,\frac{du_i}{da_{3n}}\,dx_i+\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ =0$$

Въ этомъ случаѣ количества u_i, v, w_i не содержатъ t и слѣд., дабы найти функцію Q, достаточно, чтобы выраженіе $\Sigma\,m_i\,(u_i\,dx_i+v_i\,dy+w_i\,dz_i)$ было точнымъ дифферанціаломъ функціи однихъ перемѣнныхъ x_i, y_i, z_i. Къ этому послѣднему выраженію прилагается тоже самое разсужденіе, которое употреблено выше для интегрируемости выраженія (1); а отсюда можно заключить, что въ настоящемъ случаѣ два дифференціальныхъ уравненія движенія сводятся на квадратуры, и именно одно уравненіе между двумя изъ перемѣнныхъ x_i, y_i, z_i, а другое, опредѣляющее одну изъ этихъ перемѣнныхъ во времени t. *Г.*,

2. *О теплопроводимости газообразныхъ тѣлъ.*

Въ № 15 В. М. Н. были представлены результаты изслѣдованій *Магнуса* и *Тиндалля* надъ теплопроводимостью газовъ и паровъ—результаты, сходные между собою, хотя полученные различными способами; разногласіе лишь въ отнош. проводимости водяныхъ паровъ.

По опытамъ Магнуса, водяные пары, примѣшанные къ воздуху, не измѣняютъ его теплопроводимости коль скоро они въ газообразномъ состояніи; поэтому солнечные лучи достигаютъ до земной поверхности безъ потери въ теплотѣ, если только воздухъ прозраченъ. Тиндалль находитъ противуположное; его опыты показали, что малое количество водяныхъ паровъ, примѣшанныхъ къ воздуху, увеличиваетъ значительно его поглощательную способность. Въ слѣдствіе такого разногласія оба физика повторили опыты, и каждый остался при своемъ мнѣніи. Магнусъ устроилъ опытъ отчасти на подобіе опытовъ Тиндалля, то есть, пропускалъ воздухъ въ стеклянную трубку, закрытую съ обоихъ концовъ пластинками каменной соли; съ одного конца былъ поставленъ источникъ теплоты — кипящая вода въ жестянномъ кубѣ, у другаго конца тэрмоэлектрическій столбъ; воздухъ, входящій въ трубку, получалъ влагу, проходя чрезъ куски пемзы, смоченные водою. Оказалось, что въ этомъ случаѣ пары представляли большое сопротивленіе переходу теплоты; но внимательное разсмотрѣніе показало, что сгущенные пары въ трубкѣ осаждались каплями на поверхности каменной соли. и такимъ образомъ лучистая теплота должна была проходить чрезъ слой раствора соли. Хотя не извѣстно еще какова проводимость солянаго раствора, однакожъ можно съ достовѣрностью сказать, что она мала и мало отличается отъ проводимости воды; а между тѣмъ изслѣдованія Меллони показали, что слой чистой воды, толщиною въ 1 миллиметръ, вовсе не пропускаетъ лучей, выходящихъ изъ темнаго источника теплоты. Отсюда слѣдуетъ, что значительное поглощеніе зависитъ не отъ паровъ, а отъ жидкаго раствора соли. Когда же вмѣсто пластинокъ ка-

менной соли, были употреблены стеклянныя, то разницы въ поглощеніи влажнаго и сухаго воздуха не было. (Pog. An. B. CXIV).

Тиндалль между тѣмъ нашелъ, что обыкновенный воздухъ его лабораторіи, въ которомъ кромѣ водяныхъ паровъ были еще и другіе газы, поглощаетъ въ 67 разъ болѣе лучей нежели сухой, при чемъ оказалось, что водяные пары одни поглощали болѣе въ 40 разъ, а остальные газы въ 27 разъ. Результаты этихъ опытовъ изложены въ письмѣ Тиндалля къ Дж. Гершелю (Phil. M. Vol. XXII).

Статья Магнуса о гигроскопическомъ свойствѣ каменной соли и о его вліяніи на теплопроводимость заставила Тиндалля заняться повѣркою найденныхъ уже результатовъ съ особенною тщательностью. Вторичные опыты, кромѣ подтвержденія найденныхъ уже результатовъ, указали еще на многія другія свойства газовъ. Такимъ образомъ было найдено, что составные газы, если только они смѣшаны не механически а химически, имѣютъ большую поглощательную способность, нежели составляющіе. Даже безцвѣтность, или большая прозрачность для свѣта, не всегда способствуетъ большей проводимости; напримѣръ, хлоръ и бромъ проводятъ лучше, нежели безцвѣтные газы хлороводородной и бромоводородной кислотъ. Впрочемъ и твердыя тѣла какъ будто слѣдуютъ тому же закону: сѣра, очень мало прозрачная, проводитъ 54% теплоты отъ источника въ 100° С.; между тѣмъ ея соединеніе тяжелый шпатъ, оптически прозраченъ, но вовсе не пропускаетъ лучей отъ того же источника. Въ числѣ опытовъ было повторено наблюденіе Меллони о теплопроводимости *копоти* (сажи), которая почитается самымъ дурнымъ проводникомъ теплоты. Въ самомъ дѣлѣ сажа, встрѣчающаяся въ продажѣ и копоть отъ свѣчекъ и лампъ содержатъ въ себѣ большое количество углеводорода, вещества обладающаго самою большою поглощательною, и лучеиспускательною способностями; однакожъ вообще копоть имѣетъ извѣстную степень проводимости, которая для различныхъ источниковъ различна. Такимъ образомъ оказалось, что копоть, которая была нетеплопрозрачна для лучей газовой лампы, пропускала 30% лучей отъ темнаго источника.

При испытаніи теплопроводимости озонизированнаго кислорода оказалось, что даже малое количество озона значительно увеличиваетъ поглощеніе теплоты. Замѣчательно еще и то что размѣры электродовъ имѣютъ вліяніе на проводимость электролитическаго кислорода, что подтверждаетъ наблюденія Мейдингера, который показалъ, что съ уменьшеніемъ электродовъ образуется больше озона. Изъ опытовъ Тиндалля видно, что кислородъ, полученный малыми электродами поглощаетъ болѣе лучей теплоты.

Въ послѣдствіи Тиндалль предложилъ себѣ задачу такого содержанія: *опредѣлить поглощательную и лучеиспускательную способность газа или пара безъ посторонняго источника теплоты.* Извѣстно, что всякій газъ при сгущеніи освобождаетъ теплородъ, нагрѣвается, а, расширяясь, поглощаетъ его, или охлаждается. Поэтому въ самомъ газѣ есть особенный, внутренній источникъ теплоты, свойственный каждому газу отдѣльно. Такую теплоту Тиндалль называетъ *динамическою*: т. е. *динамическое лучеиспусканіе* означаетъ лучеиспусканіе отъ нагрѣванія газа при его сгущеніи; а *динамическое поглощеніе* — поглощательную способность охлаждающагося газа. Если на концѣ трубки, въ которой произвольно можно сгущать или разрѣжать газъ, поставить термоэлектрическій столбъ, то въ прикосновеніи съ газомъ онъ можетъ указать измѣненіе степени теплоты. Такимъ образомъ сдѣланный рядъ опытовъ показалъ, *что лучеиспускательная способность всегда пропорціональна поглощательной.* По этому способу были повторены всѣ прежніе опыты и подтверждены найденные уже результаты; газы, имѣющіе наибольшую поглощательную способность производятъ наибольшее динамическое лучеиспусканіе. Изъ этихъ же опытовъ оказалось, что *водяные пары имѣютъ въ 60 разъ большую поглощательную способность, сравнительно съ сухимъ воздухомъ* — опять противуположно результатамъ Магнуса.

Тиндалль говоритъ, что прохожденіе теплоты чрезъ влажный воздухъ занимало его еще со временъ изслѣдованій надъ глетчерами; а потому онъ производитъ опыты, со всевозможнымъ стараніемъ чтобы доискаться истины. И въ самомъ дѣлѣ предметъ изслѣдованія принадлежитъ къ важнѣйшимъ; прохожденіе солнечныхъ лучей чрезъ атмосферу подвержено измѣненіямъ, ослабленіямъ, но въ какой степени—неизвѣстно. Опыты Соссюра, Мартена и Браве показываютъ, что на горахъ и въ долинахъ получается почти одинакое количество лучей, что поглощеніе теплоты въ слояхъ атмосферы ничтожно, покуда воздухъ прозраченъ, что согласуется съ результатами Магнуса: однако опыты Тиндалля показываютъ другое, и дѣло остается пока нерѣшеннымъ.

Откуда происходитъ такая разница въ результатахъ? Тиндалль ищетъ ее въ самомъ производствѣ опытовъ. (Phil. M. v. 23, 25). Онъ замѣчаетъ, что его опыты производились съ воздухомъ обыкновеннымъ, лабораторнымъ, причемъ никакого влажнаго осадка на каменной соли не было замѣтно, а не съ искуственно насыщеннымъ — какъ было у Магнуса; что большая или меньшая степень сгущенія паровъ въ воздухѣ измѣняетъ соотвѣтственно его поглощательную способность,—каковое измѣненіе до того чувствительно, что можнобы устроить на этихъ началахъ гигрометръ, превосходящій всѣ доселѣ извѣстные приборы. По словамъ Магнуса обыкновенный воздухъ не производитъ осадка — а съ этимъ то воздухомъ Тиндалль и работалъ. Во вторыхъ, Магнусъ не обратилъ вниманія на то обстоятельство, что воздухъ при входѣ въ трубку нагрѣвался и самъ по себѣ издавалъ теплоту. Въ третьихъ, воздухъ согрѣвался отъ самой лучистой теплоты. На всѣ эти обстоятельства Тиндалль обратилъ вниманіе. Наконецъ, разница можетъ проистекать еще отъ того что у Магнуса газообразная средина нагрѣвалась отъ прикосновенія со стѣнкою сосуда съ кипящею водою, почему теплота могла передаваться отъ слоя къ слою, по свойству проводимости тѣлъ. По предварительнымъ опытамъ Тиндалля оказалось, что непосредственное прикосновеніе газа къ источнику не даетъ истинныхъ результатовъ; поэтому онъ устроилъ въ послѣдствіи опытъ такъ, что лучистая теплота, по выходѣ изъ источ-

ника, проходила чрезъ небольшое пустое пространство, ограниченное съ одной стороны стѣнкой жестянаго куба съ кипящею водою, а съ другой пластинкою каменной соли. Равнымъ образомъ Тиндалль нашелъ, что нельзя ставить тэрмоэлектрическаго столба въ непосредственное прикосновеніе съ испытуемымъ газомъ; потому что движеніе его производитъ особенный источникъ теплоты.

Такимъ образомъ, повидимому, Тиндалль правъ; однакожъ полнаго рѣшенія можно ожидать только отъ дальнѣйшихъ изслѣдованій.

Въ заключеніе прибавимъ, что *Клаузіусъ* (Pog. An. B. CXVII) изъ теоретическихъ соображеній доходитъ до такихъ результатовъ: 1) Газы проводятъ теплоту гораздо хуже металловъ, такъ что проводимость атмосфернаго воздуха, при температурѣ близкой къ точкѣ замерзанія воды въ 1400 разъ меньше проводимости свинца. 2) *Проводимость газа зависитъ отъ его температуры;* она растетъ вмѣстѣ съ температурою, подобно скорости звука. 3) *Она не зависитъ отъ давленія,* претерпѣваемаго газомъ, въ извѣстныхъ только предѣлахъ. 4) Теплопроводимость больше въ легчайшихъ газахъ, а потому должна быть гораздо больше въ водородѣ нежели въ другихъ газахъ. Первый и четвертый пункты подтверждены опытами Магнуса и Тандалля; остальные два еще ожидаютъ особенныхъ опытовъ.

К. Ч.

3. Изслѣдованія относительно земнаго магнетизма, *Лямона.* (Pogg. Annal. 1862 № 8).

Существованіе періодическаго увеличенія и уменьшенія въ величинѣ суточнаго движенія было возвѣщено Г. Лямономъ еще въ 1845 году, а именно въ слѣдующихъ выраженіяхъ:

Величина суточнаго движенія въ различные годы не одинакова. Средняя разность въ склоненіи между 8-ю часами утра и 1-мъ часомъ по полудни по Геттингенскимъ наблюденіямъ была слѣдующая:

1834 — 35	8′, 25
1835 — 36	10, 04
1836 — 37	12, 90
1837 — 38	12, 29
1838 — 39	12, 16
1839 — 40	11, 05
1840 — 41	9, 50
1841 — 42	8, 50
1842 — 43	7, 55
1843 — 44	7, 63
1844 — 45	7, 41

Періодическое приращеніе и уменьшеніе средняго суточнаго движенія весьма ясно представляется въ этихъ числахъ, но дабы найти законъ нужно имѣть болѣе продолжительныя наблюденія. Что къ такому же результату приводятъ и наблюденія напряженія, можно видѣть изъ наблюденій Крейля въ Миланѣ: разность между $10\frac{1}{2}$ часовъ утра и $7\frac{1}{2}$ часовъ вечера (выраженная въ 10000 доляхъ напряженія) была въ 1837 году 18,4; а въ 1838 году 15,7. Въ настоящее время, судя по наблюденіямъ въ другихъ мѣстахъ, она достигаетъ вѣроятно неболѣе 9,0. Заключеніе, что суточное движеніе магнитныхъ элементовъ періодически то уменьшающееся, то увеличивающееся, въ виду предыдущихъ чиселъ, обнимающихъ два поворотные пункта, высказано здѣсь съ полною опредѣленностію, но длина періода не могла быть еще отсюда опредѣлена съ точностію. Я ожидалъ, говоритъ Г. Лямонъ, третьяго такого пункта и когда въ 1850—51 годахъ показалось рѣшительное уменьшеніе движенія; то я сравнилъ мои собственныя наблюденія съ старыми и вывелъ отсюда періодъ въ $10\frac{1}{3}$ года. Въ это время Г-нъ Сабинъ занимался также изслѣдованіемъ пертурбацій магнитнаго склоненія въ Торонто и Гобартонѣ за 5 лѣтъ съ 1843 — 48 и замѣтилъ, что въ теченіи этого времени съ году на годъ прибывали какъ величина, такъ и число пертурбацій. Эти наблюденія, несмотря на ихъ краткость, могли повести къ заключенію о такомъ же періодѣ, на томъ основаніи, что Г. Сабинъ уже прежде доказалъ существованіе тѣсной связи между правильными движеніями и пертурбаціями. Но Г-нъ Сабинъ пошелъ еще далѣе, говоря, что такъ какъ мы разсматриваемъ солнце, какъ главную причину при всѣхъ измѣненіяхъ, зависящихъ отъ времени дня; то весьма естественно, что во всѣхъ случаяхъ, когда мы замѣчаемъ періодическое или неперіодическое измѣненіе, мы должны изслѣдовать не представляется ли чего либо подобнаго и въ явленіяхъ солнца. Въ настоящемъ случаѣ мы встрѣчаемся именно съ такимъ явленіемъ: настойчиво и послѣдовательно производимыя Г-мъ Швабе въ Дессау наблюденія надъ числомъ солнечныхъ пятенъ, приводятъ, при простомъ взглядѣ на числа, къ періоду около 10-ти лѣтъ и поставляютъ такимъ образомъ оба упоминаемыя явленія въ соотношеніе. Прежде однако нежели мемуаръ Сабина сдѣлался извѣстнымъ на континентѣ, Профессоръ Вольфъ въ Бернѣ и Готье въ Женевѣ замѣтили согласіе между періодомъ солнечныхъ пятенъ и указанными мною періодическими измѣненіями земнаго магнетизма.

Переходимъ теперь къ изложенію матеріала, собраннаго въ послѣднее десятилѣтіе. Въ слѣдующей таблицѣ соединены относительныя числа для суточнаго движенія въ склоненіи, полученныя такимъ образомъ, что постоянно были соединяемы два опредѣленія, а именно лѣтомъ: разность между 7-ю часами утра и 1-мъ часомъ по полудни, потомъ между 8-ю часами утра и 2-мя часами по полудни; напротивъ того зимою: разность между 8-ю часами утра и 1-мъ часомъ по полудни и затѣмъ между 8-ю и 2-мя часами. Лѣтняя половина года обнимаетъ мѣсяцы отъ Апрѣля до Октября включительно, а зимняя всѣ остальные мѣсяцы того же года. Говоря строго нужнобы писать возлѣ наблюдаемыхъ движеній не 1841, 1842 . . . г. г. какъ это обыкновенно дѣлается, но 1841,5, 1842,5; однако я удерживаю прежнее обозначеніе и только замѣчаю, чтобы получить истинныя эпохи, нужно вездѣ къ числамъ года прибавлять 0,5. Весь рядъ Мюнхенскихъ наблюденій даетъ слѣдующіе результаты:

годъ	зима	лѣто	сред. годичное
1841	5′, 07	10′, 65	7′, 66
1842	4, 66	8, 90	6, 78
1843	4, 49	9, 23	6, 86
1844	4, 08	8, 60	6, 34
1845	4, 65	10, 13	7, 39
1846	6, 00	11, 23	8, 61
1847	6, 90	11, 87	9, 38
1848	8, 01	14, 40	11, 20
1849	8, 06	13, 22	10, 64
1850	7, 53	13, 31	10, 42
1851	6, 03	11, 40	8, 71
1852	6, 46	11, 53	9, 00
1853	5, 77	11, 50	8, 63
1854	4, 65	10, 48	7, 56
1855	5, 01	9, 66	7, 33
1856	4, 67	9, 48	7, 08
1857	5, 13	10, 15	7, 64
1858	6, 91	11, 76	9, 33
1859	8, 37	13, 97	11, 17
1860	7, 67	14, 20	10, 93

Поворотные пункты, опредѣленные изъ этихъ чиселъ графическимъ образомъ, даютъ 1843, 0 / 1855, 0 minimum и 1848, 8 / 1859, 5 maximum.

Къ предыдущему ряду надобно присоединить еще опредѣленія на основаніи древнихъ наблюденій, а именно maxima 1817,0 и 1837,5.

Выводя продолжительность періода изъ maximum Кассини, которое по всѣмъ вѣроятіямъ заслуживаетъ довѣрія, и maximum 1859 года мы получимъ:

$$\frac{73,0}{7} = 10,43 \text{ года}$$

т. е. на одну десятую долю различно отъ прежняго опредѣленія.

Всѣ наблюдаемыя maxima даютъ среднюю эпоху 1827,8. Выходя отъ этого числа, получаются слѣдующіе вычисленные поворотные пункты, коихъ сравненіе съ наблюдаемыми приводитъ къ показаннымъ подлѣ ихъ разностямъ

вычисленные	наблюдаемые	разница
1786, 1	1786, 5	— 0, 4
1817, 4	1817, 0	+ 0, 4
1838, 2	1837, 5	+ 0, 7
1843, 4	1843, 0	+ 0, 4
1848, 7	1848, 8	— 0, 1
1853, 9	1855, 0	— 1, 1
1859, 1	1859, 5	— 0, 4

Можно былобы, при посредствѣ иного рода обработки наблюденій, привести эти числа, еще въ большее согласіе, но этимъ ничего не выиграется, ибо самыя данныя останутся неточными въ десятыхъ доляхъ года. По этому главный результатъ, котораго мы достигаемъ при помощи новѣйшихъ наблюденій, состоитъ въ подтвержденіи положанія, высказаннаго мною уже въ 1851 году, а именно, что наблюдаемыя числа не позволяютъ какой либо комбинаціи, которая бы могла принести съ собою измѣненіе періода на двѣ или на три десятыхъ доли года.

Перейдемъ теперь къ отношенію между магнитными движеніями и солнечными пятнами.

Не подлежитъ сомнѣнію, что сравнивая таблицу Г. Швабе, содержащую годичныя числа для солнечныхъ пятенъ, съ вышеприведенными числами для количества движенія, въ склоненіи, открывается общее сходство въ періодахъ этихъ чиселъ: такъчто малому числу солнечныхъ пятенъ соотвѣтствуетъ и малое магнитное движеніе, а большимъ числамъ— болѣе значительное; но о *точномъ* согласіи обоихъ рядовъ но можетъ быть и рѣчи, даже и тогда, если вмѣсто первоначальныхъ чиселъ Швабе мы введемъ относительныя числа, выведенныя Вольфомъ на основаніи нѣкоторыхъ предположеній Въ примѣръ того мы приведемъ слѣдующіе три года

	число солнеч. пятенъ по Швабе.	относительныя числа по Вольфу	магнитное движеніе
1849	238	95, 6	10′, 64
1850	186	63, 0	10, 42
1851	151	61, 9	8, 71

Отсюда видно, что уменьшеніе числа пятенъ съ 1849 на 1850 годъ весьма значительно, между тѣмъ какъ уменьшеніе магнитнаго движенія составляетъ только 0′, 2; напротивъ того съ 1850 на 1851 годъ уменьшеніе въ числѣ первыхъ весьма не значительно, въ магнитномъ же склоненіи оно достигаетъ 1′, 7. Г-нъ Вольфъ въ предположеніи строгой пропорціональности между числомъ солнечныхъ пятенъ и излишкомъ въ магнитномъ движеніи (излишкомъ надъ самымъ низшимъ состояніемъ 6′, 27), вычисляетъ даже изъ солнечныхъ пятенъ магнитныя измѣненія. Сравнивая эти вычисленія съ наблюдаемыми числами, можно увидѣть, что въ нѣкоторыхъ случаяхъ разность доходитъ до одной четверти періода. Если же прослѣдить эту соотвѣтственность еще въ бо́льшихъ подробностяхъ, сравнивая числа по мѣсяцамъ, то откроется, что наприм. для Іюля и *Сентября* 1860 года наблюдаемыя числа солнечныхъ пятенъ почти вдвое болѣе вычисленныхъ.

Это разсмотрѣніе приводитъ насъ къ заключенію, что оба явленія не могутъ непосредственно обусловливать другъ друга, но по всей вѣроятности суть слѣдствіемъ одной общей и высшей причины. Спрашивается теперь гдѣ искать эту космическую силу?—Г. Сабинъ допускаетъ въ своихъ изслѣдаваніяхъ непосредственное магнитное дѣйствіе солнца на магнитную стрѣлку; со своей стороны я при различныхъ случаяхъ указалъ на необходимость принятія электричества на равнѣ съ тяготѣніемъ, какъ одной по всюду дѣйствующей въ міровомъ пространствѣ силы, присущей всѣмъ небеснымъ тѣламъ, и въ подтвержденіе этой гипотезы, кромѣ явленій, представляемыхъ кометами, полярными сіяніями и зодіакальнымъ свѣтомъ, присовокупилъ также и суточное колебаніе барамотра. Сверхъ сего я высказалъ также, какимъ образомъ электричество солнца можетъ быть разсматриваемо какъ причина суточныхъ магнитныхъ движеній, а солнечныя пятна какъ электрическія изверженія. Сообразно этому взгляду, увеличеніе числа солнечныхъ пятенъ соотвѣтствовало-

бы большему развитію электричества. Кажется, что этотъ взглядъ раздѣляетъ и Г-нъ Броунъ, ибо онъ равнымъ образомъ приходитъ къ необходимости принятія въ солнцѣ магнитной или электрической силы.

Очевидно, что для прочнаго основанія этихъ гипотезъ недостаточно еще тѣхъ данныхъ, которыя мы имѣли въ собранныхъ доселѣ наблюденіяхъ; поэтому ближайшая задача Астрономовъ и Физиковъ должна заключаться въ продолженіи систематическихъ и вполнѣ соотвѣтствующихъ цѣли наблюденій, которыя одни только могутъ подвинуть рѣшеніе задачи.

Г.

Рѣшеніе задачи N. 4. Л. Износкова.

(См. № 8, В.-М. Н.)

Лежандръ находитъ значенія опредѣленныхъ интеграловъ:

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax\,dx}{(1+x^2)^n} = \frac{\pi e^{-a}}{2^n \Gamma(n)} \left[a^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} a^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n+1)}{2\,.\,4} a^{n-3} + \ldots \right]$$

$$\int_0^\infty \frac{x \sin ax\,dx}{(1+x^2)^n} = \frac{\pi e^{-a}}{2^n \Gamma(n)} \left[a^{n-1} + \frac{(n-1)(n-2)}{2} a^{n-2} + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)\,n}{2\,.\,4} a^{n-3} + \ldots \right] \quad (*)$$

Умножая ихъ на $e^{-a}\,da$ и интегрируя въ отношеніи a въ границахъ 0 и ∞, получимъ:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}} = \frac{\pi}{2^n \Gamma(n)} \left[\frac{\Gamma(n)}{2^n} + \frac{n(n-1)\,\Gamma(n-1)}{2^n} + \frac{n(n-1)(n-2)(n+1)\,\Gamma(n-2)}{1\,.\,2\,.\,2^n} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n+1)(n+2)\,\Gamma(n-3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,2^n} + \ldots \ldots \right]$$

$$\int_0^\infty \frac{x^2\,dx}{(1+x^2)^{n+1}} = \frac{\pi}{2^n \Gamma(n)} \left[\frac{\Gamma(n)}{2^n} + \frac{(n-1)(n-2)\,\Gamma(n-1)}{2^n} + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)\,n\,\Gamma(n-2)}{1\,.\,2\,.\,2^n} + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)\,n\,(n+1)\,\Gamma(n-3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,2^n} + \ldots \right]$$

Но значеніе этихъ интеграловъ извѣстно въ конечномъ видѣ, такъ что, подставивъ эти значенія, будемъ имѣть:

$$\frac{2^{2n-1}\,\Gamma(n+\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(n+1)} = 1 + n + \frac{n(n+1)}{1\,.\,2} + \frac{n(n+1)(n+2)}{1\,.\,2\,.\,3} + \ldots$$

$$\frac{2^{2n}\,\Gamma(n-\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(n+1)} = 1 + (n-2) + \frac{n(n-3)}{1\,.\,2} + \frac{n(n+1)(n-4)}{1\,.\,2\,.\,3} + \ldots$$

или:

$$\sum_{i=0}^{i=n} \frac{\Gamma(n+i)}{\Gamma(n)\,\Gamma(i+1)} = \frac{2^{2n-1}\,\Gamma(n+\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(n+1)},$$

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{\Gamma(n-(i+2))\,\Gamma(n+i-1)}{\Gamma(i+1)\,\Gamma(n)\,\Gamma(n-2)} = \frac{2^{2n}\,\Gamma(n-\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(n+1} - 1.$$

(*) Exercices de calcul intégral par Legandre, tome premier page 359.

Типографія А. Марциновскаго. — ВИЛЬНО. 1862 г. Октября 17-го. — Редакторъ-Издатель *М. Гусевъ*.